Ecuaciones diferenciales

1. Conceptos generales

Ecuación diferencial ordinaria. Definición

Se llama ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.) a una relación entre la variable independiente x, una función desconocida $y(x)$ y sus derivadas $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n}(x)$; es decir, una expresión de la forma $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Ejemplos:

$y'' - 3y' + \cos y - \operatorname{sen} x = 0$; $y' + \ln x = 0$, son E.D.O.s en las que la función desconocida es $y(x)$.

Orden de una E.D.O. Definición

Se llama orden de la ecuación diferencial ordinaria al mayor de los órdenes de las derivadas que contiene la ecuación.

Ejemplos:

$y'' - 3y' + \cos y - \operatorname{sen} x = 0$ es una E.D.O. de segundo orden.

$y' + \ln x = 0$ es una E.D.O. de primer orden.

$2xy + e^{y'} + \operatorname{tg} y''' = 0$ es una E.D.O. de tercer orden.

Solución de una E.D.O. Definición

Se llama solución o integral de la ecuación diferencial oridinaria $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ a toda función $y = g(x)$ tal que $f(x, g(x), g(x)', g(x)'', \ldots, g(x)^{(n)}) = 0$.

En general, una ecuación diferencia tiene infinitas soluciones y se suelen poner condiciones iniciales para limitar el número de éstas.

En el resto del capítulo nos limitaremos a las **ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden**.

Integral o solución general. Definición

Se llama integral general o solución general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden a una expresión del tipo $y = y(x, C)$, donde C es una constante real, de modo que para cada valor fijo de C la función $y(x, C)$, que llamaremos integral particular, es solución de la E.D.O. de primer orden.

Desde un punto de vista geométrico, la integral general representa una familia de curvas en el plano, que reciben el nombre de curvas integrales de la ecuación diferencial ordinaria. Las integrales particulares son las diferentes curvas de la familia.

Integral o solución singular. Definición

Las soluciones, si existen, que no se obtengan de la integral general reciben el nombre de integrales singulares o soluciones singulares.

Problema de Cauchy o de valor inicial. Definición

Se llama problema de Cauchy o de valor inicial (P.V.I.) al conjunto formado por una ecuación diferencial ordinaria $y' = g(x, y)$ y una condición inicial $y(x_0) = y_0$.

Teorema de Picard (de existencia y unicidad)

Si la función $g(x, y(x))$ es diferenciable en el intervalo (a, b), el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= g(x,y), \quad x \in (a,b) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

tiene solución única, es decir, existe una única función $y = f(x)$, definida en (a, b), solución de la ecuación diferencial tal que $f(x_0) = y_0$.

La solución a un problema de Cauchy concreto se encuentra a partir de la integral general de la ecuación diferencial, determinando la constante C de modo que se obtenga una curva que pase por el punto (x_0, y_0) de la condición inicial.

2. Algunos tipos de E.D.O. de primer orden

Ecuaciones de variables separadas o separables. Definición

Una E.D.O. de primer orden se llama de variables separables si se puede expresar de la forma $y'g(y) = f(x)$.

La integral general de esta ecuación diferencial se calcula integrando, respecto a la variable x, en los dos miembros de la igualdad:

$$\int g(y(x))y'(x)dx = \int f(x)dx,$$

pero como y es una función de x y $dy = y'dx$, se tiene

$$\int g(y(x))y'(x)dx = \int g(y)dy,$$

por lo que la integral general de esta ecuación diferencial se obtiene a partir de la siguiente igualdad,

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx.$$

Ejemplo:

La ecuación $(1 + y^2) + xyy' = 0$ es una ecuación diferencial de variables separables, puesto que se puede expresar de la forma siguiente,

$$\frac{1}{x} = \frac{-y}{1+y^2}y',$$

donde $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(y) = \dfrac{-y}{1+y^2}$.

Para resolver la ecuación se integra como sigue,

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{-y}{1+y^2}dy,$$

por tanto, $\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + C_1$ y $|x| = \dfrac{e^{C_1}}{\sqrt{1+y^2}} = \dfrac{C_2}{\sqrt{1+y^2}}$. Elevando al cuadrado se obtiene la solución general:

$$x^2(1+y^2) = C.$$

Ecuaciones diferenciales homogéneas. Definición

Una E.D.O. de primer orden es homogénea si se puede poner de la forma $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

La integral general de esta ecuación diferencial se puede calcular haciendo el cambio de variable $y(x) = xu(x)$, con lo que la ecuación resulta $u'x + u = f(u)$, que es una ecuación de variables separables. En la práctica se intenta poner y' como una función de $\frac{y}{x}$, o lo que es equivalente, una función de $\frac{x}{y}$.

Ejemplo:

La ecuación $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$ es una ecuación diferencial homogénea, puesto que se puede poner de la forma

$$y' = \frac{3\frac{y}{x} - 4}{2\frac{y}{x} - 3}.$$

Por tanto, se puede hacer el cambio de variable $y = xu$, obteniéndose

$$4 - 3u + (u'x + u)(2u - 3) = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$u'x = \frac{3u - 4 - 2u^2 + 3u}{2u - 3},$$

de donde

$$u' \frac{2u - 3}{-2u^2 + 6u - 4} = \frac{1}{x},$$

que es una ecuación de variables separable, donde $g(u) = \dfrac{2u - 3}{-2u^2 + 6u - 4}$ y $f(x) = \frac{1}{x}$. Integrando, se tiene

$$\int \frac{2u - 3}{-2u^2 + 6u - 4} du = \int \frac{1}{x} dx,$$

por tanto, $-\frac{1}{2} \ln |u^2 - 3u + 2| = \ln |x| + C$, y deshaciendo el cambio de variable y operando se obtiene la integral general:

$$y^2 - 3xy + 2x^2 = k.$$

Ecuaciones diferenciales lineales. Definición

Una ecuación diferencial de primer orden es lineal si es de la forma $y' + g(x)y = h(x)$. La solución general es

$$y(x) = e^{-\int g(x)dx}\left(\int h(x)e^{\int g(x)dx}dx + C\right).$$

Ejemplo:

La ecuación $y' + 2y = x^2 + 2x$ es una ecuación diferencial lineal, puesto que se puede expresar como $y' + g(x)y = h(x)$, donde $g(x) = 2$ y $h(x) = x^2 + 2x$.

Por tanto, aplicando la fórmula anterior, se tiene como solución la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} y &= e^{-2x}\left(\int (x^2 + 2x)e^{2x}dx + C\right) \\ &= e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C\right) \\ &= Ce^{-2x} + \frac{1}{2}\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Ecuaciones de Bernoulli. Definición

Una E.D.O. de primer orden es de Bernoulli si es de la forma $y' + g(x)y = h(x)y^n$, con $n \neq 0, 1$.

Las ecuaciones de Bernoulli se pueden integrar reduciéndolas a una ecuación lineal mediante el cambio $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$.

Ejemplo:

La ecuación $y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 y^2$ es una ecuación diferencial de Bernoulli, donde $g(x) = \frac{1}{x+1}$, $h(x) = (x+1)^3$ y $n = 2$. Así, haciendo el cambio $z = \frac{1}{y}$, se tiene que $y = \frac{1}{z}$, y se obtiene la ecuación diferencial

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{(x+1)z} = -\frac{1}{2}\frac{(x+1)^3}{z^2},$$

esto es,

$$-z' + \frac{z}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3,$$

equivalente a

$$z' - \frac{z}{x+1} = \frac{1}{2}(x+1)^3,$$

que es una ecuación lineal, donde $g(x) = -\frac{1}{x+1}$ y $h(x) = \frac{1}{2}(x+1)^3$, cuya solución es

$$z = \frac{(x+1)^4}{6} + C(x+1),$$

entonces, deshaciendo el cambio, se obtiene la integral general de la ecuación de Bernouilli:

$$\frac{1}{y} = \frac{(x+1)^4}{6} + C(x+1).$$

3. Aplicaciones prácticas de las E.D.O. de primer orden

Crecimiento de una población

Si $x(t)$ es la cantidad de individuos de una población en el instante t, el ritmo de crecimiento de la población es proporcional al número de individuos, esto es, $\frac{dx}{dt} = kx$.

También existen otros fenómenos, como la desintegración radiactiva o el intercambio de calor, que se rigen por una ecuación diferencial similar.

Caída de cuerpos y otros problemas de movimiento

La caída libre de un cuerpo viene determinada por la ecuación diferencial $\frac{dv}{dt} = g$. Si el aire o cualquier otro medio ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad del cuerpo que cae, la ecuación diferencial del movimiento es $\frac{dv}{dt} = g - kv$.

4. Métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

No siempre es posible la resolución analítica de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, existe la posibilidad de obtener la curva solución de un problema de valor inicial, mediante métodos numéricos, calculándola aproximadamente en algunos puntos del intervalo de interés.

Dado el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$ con $x \in [a, b]$ y la condición inicial $y(x_0) = y_0$, con solución única $y(x)$, los métodos siguientes obtienen valores aproximados a la curva solución $y(x)$ en un conjunto de puntos igualmente espaciados del intervalor $[a, b]$.

Denotaremos por

- $\{x_n : 0 \leq n \leq m\}$ al conjunto de puntos del intervalo $[a, b]$ en el que se pretende obtener valores aproximados de la curva integral. Entonces,

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_n &= x_0 + hn, \quad \text{siendo} \quad h = \frac{b-a}{m}. \end{aligned}$$

- $y(x)$ a la curva solución, $y(x_n)$ al valor exacto de esta función en el punto x_n e y_n al correspondiente valor aproximado obtenido por el método numérico.
- $f_n = f(x_n, y_n)$, $n = 1, \ldots, m$, son los valores aproximados de la derivada de la curva solución, siendo los valores exactos $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$.

Errores de Truncamiento

Al aproximar por un método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales cabe distinguir dos tipos de errores:

i) Error global en el paso i-ésimo: $E_i = |y(x_i) - y_i|$.

ii) Error local cometido en cada paso: $e_i = |\tilde{y}(x_i) - y_i|$, siendo $\tilde{y}(x_i)$ la solución exacta del problema de valor inicial.

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ \tilde{y}(x_{i-1}) &= y_{i-1} \end{aligned}$$

e_i es el error correspondiente a la aproximación en x_i, suponiendo que la aproximación anterior fuera exacta.

Métodos de Taylor

Se basan en la posibilidad de obtener $y(x_{n+1})$ mediante el desarrollo de Taylor de $y(x)$ en torno a x_n, para $n = 1, \ldots, m-1$,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \ldots + \frac{h^k}{k!}y^{(k}(x_n) + R_k.$$

Para obtener la aproximación $y(x_{n+1})$ se sustituye $y(x_n)$ por y_n y la derivada $y'(x_n)$ por $f_n = f(x_n, y_n)$. Para las derivadas sucesivas, se sustituye x por x_n e y por y_n en las correspondientes derivadas de la función de una variable $f(x, y(x))$.

Método de Taylor de orden 1 o método de Euler

Dado el problema de valor inicial $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, con solución única $y(x)$, el método de Euler consiste en aproximar el valor de y en los puntos $x_n = x_0 + nh$ por los valores y_n obtenidos a partir de y_0 mediante el algoritmo:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, \ldots, m-1.$$

Se usa el polinomio de Taylor de primer orden. La idea es aproximar la curva integral por su tangente. Cada trozo de curva se sustituye por un segmento que tiene aproximadamente la misma pendiente que la curva.

Ejemplo:

Aproximar, por el método de Euler, la solución del problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{ccc} y' & = & -y(x) \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right\} x \in (0, 1/2),$$

con h = 0,1.

Se trata de obtener los valores aproximados de la solución en los puntos $x_i = x_0 + hi$, con $x_0 = 0$y h = 0,1. Por tanto se obtiene: $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,2$, $x_3 = 0,3$, $x_4 = 0,4$ y $x_5 = 0,5$. Partimos de $y_0 = 1$ y cada y_i se obtendrá mediante la siguiente fórmula,

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

donde $f(x,y) = -y$, es decir,

para $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

para $x_1 = 0,1$, $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 - hy_0 = 1 - (0,1 \cdot 1) = 0,9$

para $x_2 = 0,2$, $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 - hy_1 = 0,9 - (0,1 \cdot 0,9) = 0,81$

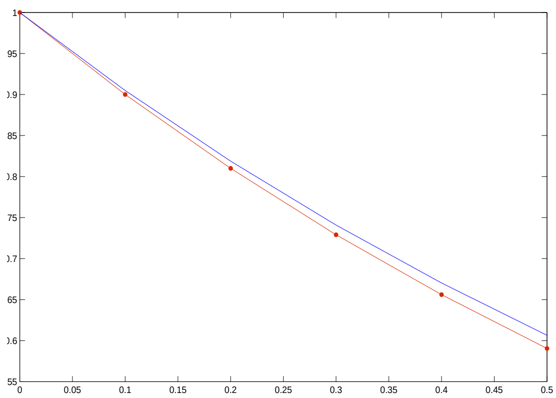
para $x_3 = 0,3$, $y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = y_2 - hy_2 = 0,81 - (0,1 \cdot 0,81) = 0,729$

para $x_4 = 0,4$, $y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = y_3 - hy_3 = 0,729 - (0,1 \cdot 0,729) = 0,6561$

para $x_5 = 0,5$, $y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = y_4 - hy_4 = 0,6561 - (0,1 \cdot 0,6561) = 0,59049$

Comparamos con la solución exacta:

$y(x) = e^{-x}$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
$y(0,1) = 0,9048$	0,0048
$y(0,2) = 0,8187$	0,0087
$y(0,3) = 0,7408$	0,0118
$y(0,4) = 0.6703$	0,0142
$y(0,5) = 0,6065$	0,0160



Método de Taylor de orden k

Consiste en aproximar $y(x_{n+1})$ por y_{n+1}, donde

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} f'(x_n, y_n) + \ldots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1}(x_n, y_n), \quad n = 0, \ldots, m-1,$$

siendo $f', f'', \ldots$, derivadas de la función de una variable $f(x, y(x))$.

Ejemplo:

Apliquemos el método de Taylor de orden dos para aproximar la solución del problema de valor inicial considerado en el ejemplo anterior. La expresión a considerar en este caso será:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y_i),$$

donde $f(x, y) = -y$ y $f'(x, y) = -y'$. Sustituyendo y' por su valor se tiene $f'(x, y) = y$. Así,

para $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

para $x_1 = 0,1$, $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2!} f'(x_0, y_0) = y_0 - hy_0 + \frac{h^2}{2!} y_0 =$
$1 - (0,1 \cdot 1) + \left(\frac{0.1^2}{2!} \cdot 1\right) = 0,905$

para $x_2 = 0,2$, $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) + \frac{h^2}{2!} f'(x_1, y_1) = y_1 - hy_1 + \frac{h^2}{2!} y_1 =$
$0,905 - (0,1 \cdot 0,905) + \left(\frac{0.1^2}{2!} \cdot 0,905\right) = 0,819025$

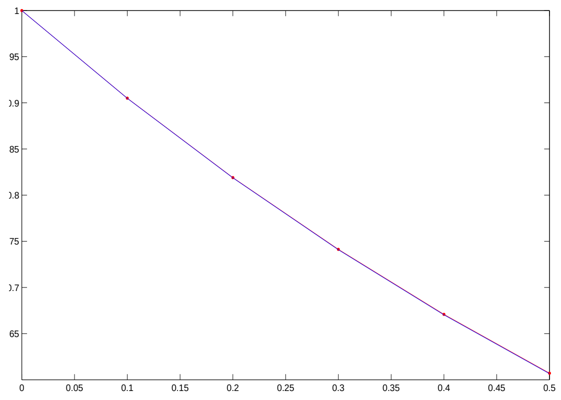
para $x_3 = 0,3$, $y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) + \frac{h^2}{2!} f'(x_2, y_2) = y_2 - hy_2 + \frac{h^2}{2!} y_2 =$
$0,819025 - (0,1 \cdot 0,819025) + \left(\frac{0.1^2}{2!} \cdot 0,819025\right) = 0,74121763$

para $x_4 = 0,4$, $y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) + \frac{h^2}{2!} f'(x_3, y_3) = y_3 - hy_3 + \frac{h^2}{2!} y_3 =$
$0,74121763 - (0,1 \cdot 0,74121763) + \left(\frac{0.1^2}{2!} \cdot 0,74121763\right) = 0,67080196$

para $x_5 = 0,5$, $y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) + \frac{h^2}{2!} f'(x_4, y_4) = y_4 - hy_4 + \frac{h^2}{2!} y_4 =$
$0,67080196 - (0,1 \cdot 0,67080196) + \left(\frac{0.1^2}{2!} \cdot 0,67080196\right) = 0,60707577$

Comparamos con la solución exacta:

$|y(x_i) - y_i|$: 0,0002; 0,000325; 0,00041763; 0,00050196; 0,00057577



Los métodos de Taylor de orden bajo presentan la desventaja de tener que tomar h muy pequeño, y los de orden alto la necesidad de obtener derivadas de orden alto de f.

Ejercicios

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales,

a) $y' = \dfrac{(x^2+1)(1-y^2)}{xy}$

b) $e^y \operatorname{sen} 2x + y'(e^{2y} - y)\cos x = 0$

c) $y \ln x = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2 y'$

d) $(y^2 + yx) - x^2 y' = 0$

e) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$

f) $-y + (x + \sqrt{xy})y' = 0$

g) $y' + y = e^{3x}$

h) $y' + y = \dfrac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}}$

i) $y' - \dfrac{1}{x} y = x^2 y^4$

j) $x^2 y' - 2xy = 3y^4$ sujeta a la condición inicial $y(1) = \dfrac{1}{2}$

2. En cualquier momento dado la cantidad de bacterias en un cultivo crece a una tasa proporcional a las bacterias presentes. Al cabo de tres horas se observa que hay 400 individuos y 2000 pasadas 10 horas. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

3. Según la Ley de Newton, la velocidad de enfriamieno de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_0 del aire. Si la temperatura del aire es de $20°C$ y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde $100°C$ hasta $60°C$, ¿ al cabo de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta $30°C$?

4. Aproximar, por el método de Euler, la solución del problema de valor inicial

$$\left.\begin{cases} y' & = & x\sqrt{y} \\ y(1) & = & 4 \end{cases}\right\} x \in (1, 1, 5),$$

con h = 0,1.